Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα προαγωγικών εξετάσεων
στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό η Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Ισχύει $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 - \ln x_2, x_1 > 0, x_2 > 0$.

ii. Η παράσταση $x^a + 2x^2 - x + 1, \alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει πολυώνυμο για κάθε τιμή του α.

iii. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Ισχύει $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a, a > 0$.

v. $\ln 1 = 0$.

Μονάδες 10

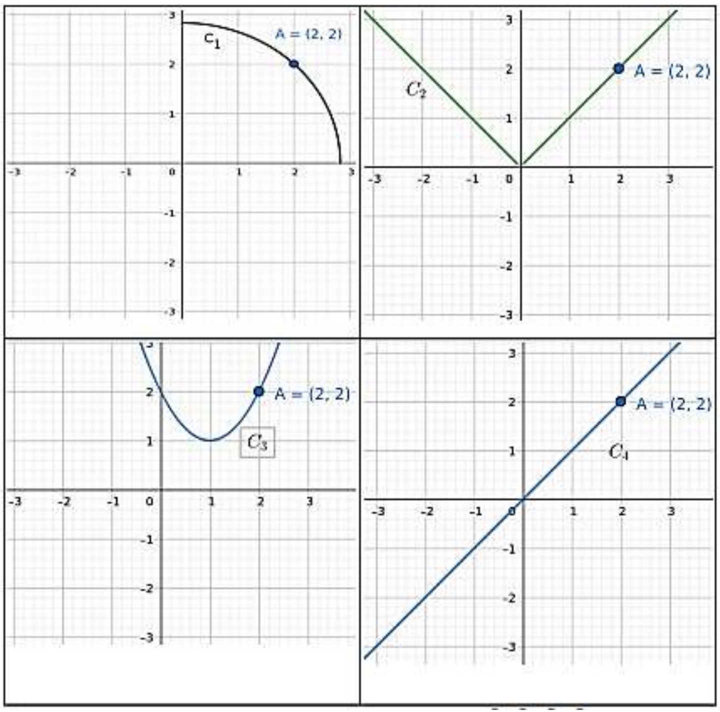
Β. Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$,να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς θ_1, θ_2 ισχύει :

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1 ,C_2 ,C_3 ,C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

Μονάδες 12

β) Για τις συναρτήσεις C_2 ,C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-7x^2+2x+a, \alpha\in\mathbb{R}$.Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-1 :

Α. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α..

Μονάδες 8

Για α=3:

Β. να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Μονάδες 8

Γ. να λύσετε την ανίσωση $P\left(x\right)\leq 0$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=3+\sqrt{3}\text{εφω}\cdot\text{ημx}, \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση

$-2\text{συν}^2\omega+\text{ημω}=-1, \omega\in[0,\frac{\pi}{2}]$, τότε:

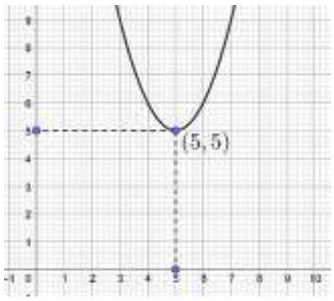
α) i. Να αποδείξετε ότι $\text{εφω}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

ii. Για $\text{εφω}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

Μονάδες 04

β) Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{g}\left(\mathrm{x}\right)=\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}+30$, $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

Μονάδες 04

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 07

Λύση

ΘΕΜΑ 1^o

Α.ΛΛΣΣΣ
Β.Θεωρία

ΘΕΜΑ 2^o

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.
Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Επειδή η C_2 είναι η άρτια ισχύει ότι $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow k=2$.
Επειδή η C_4 είναι η περιττή ισχύει ότι $f(-2)=-f(2)\Leftrightarrow k=-2$.

ΘΕΜΑ 3^o

Α. Το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-1 οπότε $P(1)=0\Leftrightarrow 2-7+2+a=0\Leftrightarrow a=3$.
Για α=3 είναι $P(x)=2x^3-7x^2+2x+3$

Β. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

2	-7	2	3	ρ= 1
	2	-5	-3	
2	- 5	-3	0	

$P(x)=(x-1)(2x^2-5x-3)$

Το τριώνυμο $2x^2-5x-3$ έχει διακρίνουσα Δ= 49 και ρίζες $x_1=3,\ x_2=-\frac{1}{2}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης P(x) = 0 είναι οι αριθμοί $1,3,-\frac{1}{2}$.

Γ. Από τον διπλανό πίνακα προσήμων
είναι $P(x)\le 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,3]$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-5x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ΘΕΜΑ 4^o

α) i. $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu\omega=-1\Leftrightarrow -2(1-\eta\mu^2\omega)+\eta\mu\omega=-1\Leftrightarrow -2+2\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega+1=0\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega-1=0$
(1)

Θέτουμε $ημω = x$ και η (1) γίνεται: $2x^2 + x - 1 = 0$ η οποία είναι 2ου βαθμού με ρίζες -1 και 1/2, άρα $ημω = -1$ ή $ημω = \frac{1}{2}$. Όμως $ω \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα $0 \le ημω \le 1$, οπότε $ημω = \frac{1}{2}$.

Τότε $ημω = ημ\frac{\pi}{6} \overset{ω \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} ω = \frac{\pi}{6}$. Είναι $εφω = εφ\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. $f(x) = 3 + \sqrt{3}εφω \cdot ημx = 3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}ημx = 3 + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}ημx = 3 + ημx$.

Είναι $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow 2 \le 3 + ημx \le 4 \Leftrightarrow 2 \le f(x) \le 4$, άρα η f έχει ελάχιστη τιμή το 2 όταν $ημx = -1$ και μέγιστη το 4 όταν $ημx = 1$.

β) i. Με βάση το σχήμα, η g έχει ελάχιστο το 5 για x = 5.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2 \le f(x) \le 4$, ενώ επειδή η g έχει ελάχιστο το 5, ισχύει ότι $g(x) \ge 5$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < g(x)$, επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινά σημεία.